HISTORIA:

Los conceptos de chance y de incertidumbre son tan viejos como la civilización misma, la idea de juegos de azar tienen una larga historia. Aproximadamente por los años 3500 AC, juegos de azar practicados con objetos de hueso, podrían ser considerados como los precursores de los dados, fueron ampliamente desarrollados en Egipto y otros lugares. Sabemos que los juegos con dados han sido populares desde esa época y fue parte importante en el desarrollo de la teoría de la probabilidad.

Se acepta generalmente que la teoría matemática de la probabilidad fue iniciada por los matemáticos franceses Blais Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601- 1662) cuando lograron obtener probabilidades exactas para ciertos problemas relacionados con los juegos de dados. Algunos de los problemas que resolvieron habían permanecido sin solución unos 300 años. Sin embargo, probabilidades numéricas para ciertas combinaciones de dados ya habían sido calculadas por Girolano Cardano (1501-1576) y por Galileo Galilei (1564-1642).

La teoría de la probabilidad ha sido constantemente desde el siglo XVII y ampliamente aplicada en diversos campos de estudio como la ingeniería, medicina, ciencias.

DEFINICIONES:

La teoría de la probabilidad es un modelamiento matemático del fenómeno del azar o la aleatoriedad.

Experimentos aleatorios: son aquellos experimentos cuyos resultados son impredecibles, dependen del azar. En estos experimentos no podemos precisar un resultado, pero si podemos calcular hasta qué punto se puede esperar que ello ocurra.

Ejemplos:

E_1: se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.

E_2: se lanza una moneda 4 veces y se observa la secuencia de caras y cecas que ocurren.

E_3: se lanza una moneda hasta que aparezca una cara, se cuenta el número de veces que la moneda fue lanzada.

Características de un experimento aleatorio

- Es posible repetir el experimento indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones.
- Podemos describir un conjunto de todos los resultados posibles.

Espacio muestral: es el conjunto de resultados posibles de un experimento.

Ejemplos:

S_1= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

S_2= $\{cccc, cccs, ccsc, cscc, sccc, ccss, cscs, cssc, scsc, sscc, csss, scss, sscs, sssc, ssss\}$

S_3= $\{1, 2, 3, 4, \dots \infty\}$

Suceso o evento: un suceso A respecto de un espacio muestral S asociado a un experimento E es un subconjunto del mismo. El evento A= $\{a\}$, constituido por un solo elemento de S, se denomina evento elemental. S y $\emptyset$ son subconjuntos de S por lo tanto son eventos, $\emptyset$ se denomina el evento imposible o nulo, S es el evento cierto o seguro.

Ejemplos:

A_{11}: aparece un número par $\Rightarrow$ $A_{11} = \{2, 4, 6\}$

A_{12}: aparece un número mayor que 4 $\Rightarrow$ $\{5, 6\}$

A_{21}: aparecen 3 caras ⇒ $\{cccs, ccsc, cscc, sccc\}$

Métodos para combinar sucesos: los eventos pueden combinarse para formar nuevos eventos utilizando las diversas operaciones entre conjuntos.

A∪B es el evento que ocurre si y solo si A ocurre o B ocurre o ambos.

A∩B es el evento que ocurre si y solo si ocurre A y ocurre B.

A^C es el evento que ocurre si y solo si A no ocurre.

Sucesos mutuamente excluyentes: dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir juntos, A∩B=∅.

Frecuencia relativa:

Se repite n veces el experimento aleatorio E, sea A un suceso asociado a E. sea n_A el número de veces que ocurre el suceso A en las n repeticiones.

Ejemplo: se lanza un dado y se observa el número que aparece. El suceso a: aparece el numero 2.

S = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ A = $\{2\}$

La siguiente tabla nos muestra el resultado al haber realizado el experimento n veces.

n	f_A	fR
1	0	0
2	1	1/2
3	1	1/3
10	1	1/10
14	2	2/14
20	3	3/20
30	5	5/30

Definición: $fR_A = \frac{n_A}{n}$ se llama frecuencia relativa del suceso A en las n repeticiones de E. La frecuencia relativa tiene las siguientes propiedades:

1. $0 \leq fR \leq 1$.
2. $fR = 1$ ⇔ A ocurre cada vez en las n repeticiones.
3. $fR = 0$ ⇔ A nunca ocurre en las n repeticiones.
4. Si $A \cap B = \emptyset$ y fR_{AUB} es la frecuencia relativa del suceso asociado AUB, entonces $fR_{AUB} = fR_A + fR_B$.
5. Regularidad estadística: La frecuencia relativa con que ocurre un suceso A tiende a variar cada vez menos cuando el número de repeticiones aumente.

Espacios muestrales finitos: el espacio muestral S se puede definir como $S = \{a_{1.}a_2, \ldots, a_k\}$. A fin de caracterizar P(A), en este modelo se considera primero el suceso que esta constituido por un solo resultado llamado suceso elemental $A_i = \{a_i\}$, a cada uno de los sucesos elementales se les asigna un numero p_i llamado la probabilidad de a_i tal que:

1. $P_i \geq 0$, i=1, 2, 3, …, k.
2. $P_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = 1$.

Estas condiciones determinan de un modo único P(A) para cada uno de los sucesos $A_i \subset S$.

La suposición mas común que se hace es que todos los resultados son igualmente probables, por lo tanto cada uno de los $p_i = 1/k$, por la segunda condición. Por lo tanto para cualquier suceso A que conste de r resultados, P(A)=r/k.

$$P(A) = \frac{numero\ de\ formas\ que\ E\ puede\ ocurrir\ favorablemente\ a\ A}{numero\ total\ de\ maneras\ que\ E\ puede\ ocurrir}$$

Ejemplo: Supongamos que tenemos una caja que contiene 120 cartas de tal manera que hay:

20 cartas rojas marcadas con el dígito 1, 20 cartas rojas marcadas con el digito 2, 10 cartas rojas marcadas con el digito 3, 30 cartas blancas marcadas con el digito 1, 10 cartas blancas marcadas con el digito 2, 30 cartas blancas marcadas con el digito 3.

Sean los sucesos: A: extraer una carta blanca, B: extraer una carta con el digito 1 y C: extraer una carta con el digito 2. Calcular las probabilidades: P(A), P(B), P(C), P(AUB), P(AUC), P(BUC), P(AUBUC), P(A∩B), P(A∩C), P(B∩C), P(A∩B∩C).

	1	2	3	TOTAL
ROJO	20	20	10	50
BLANCO	30	10	30	70
TOTAL	50	30	40	120

$\mathrm{P(A)} = \frac{70}{120}$, $P(B) = \frac{50}{120}$, $P(C) = \frac{30}{120}$, $P(AUB) = \frac{70+50-30}{120}$, $P(AUC) = \frac{70+3}{}$

Interpretación de la probabilidad:

- Como frecuencia relativa: en muchos problemas, la probabilidad de que ocurra un determinado suceso puede ser interpretado como la frecuencia relativa con que puede ser obtenido ese resultado, si se repite el experimento un gran numero de veces en condiciones similares.
- Interpretación clásica: esta basado en el concepto de resultado igualmente probables. Si un experimento tiene n posibilidades, la probabilidad de cada uno debe ser 1/n.

Las dos definiciones anteriores tienen grandes fallas. La definición de frecuencia no esta claramente definida puesto que “valores muy grandes no ha sido definido”. La definición clásica es esencialmente circular puesto que la idea de “igualmente probable” tampoco ha sido definida.

La teoría de la probabilidad

Como se ha visto se presentan discusiones sobre el propio significado y la interpretación de la probabilidad que se asignan a los resultados de los experimentos.

En un experimento dado es necesario a cada evento A del espacio muestral S un número que indique la probabilidad de que A ocurra. Ese número se llama P(A). de acuerdo con la teoría de la probabilidad ese número debe satisfacer tres axiomas:

A_1: Para cualquier evento A, $P(A) \geq 0$, o sea que la probabilidad de cualquier evento no debe ser negativa.

A_2: P(S) = 1, o sea que la probabilidad de un evento cierto es 1.

A_3: Para cualquier secuencia infinita de eventos mutuamente excluyentes A_1, A_2, A_3,…, $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$.

Definición matemática de Probabilidad: la probabilidad de un evento A es la especificación del número P(A) que satisface los axiomas 1, 2 y 3.

Teoremas

1. La probabilidad de un evento imposible es igual a 0: $P(\emptyset) = 0$.

Demostración: $S = \emptyset \cup S$, los eventos $S\ y\ \emptyset$ son mutuamente excluyentes, entonces:

$P(S) = P(\emptyset \cup S) = P(\emptyset) + P(S)$ por axioma 3.

$\therefore P(\emptyset) = 0$

2. Si A es un evento de un espacio muestral S, entonces P(A) es igual a la suma de las probabilidades de los resultados individuales que componen A.

Demostración: Sea O_1, O_2, O_3,…la secuencia finita o infinita de resultados que componen el evento A, siendo los O_i mutuamente excluyentes. Por lo tanto:

$A = O_1 \cup O_2 \cup O_3 \cup \ldots \Rightarrow P(O_1) + P(O_2) + P(O_3) + \cdots$ Por axioma 3.

3. Si un experimento puede dar origen a uno de N resultados diferentes igualmente probables, y si n de estos resultados constituyen juntos el evento A, entonces la probabilidad del evento A es: $P(A) = \frac{n}{N}$.

Demostración: Sabemos que O_1, O_2, O_3, …, O_N representas los resultados individuales de S, cada uno con probabilidad 1/N. Si el evento A es la unión de n de estos resultados mutuamente excluyentes y no interesa cuales sean estos, entonces:

$$P(A) = P(O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_n) = P(O_1) + P(O_2) + \cdots + P(O_n) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N} = \frac{n}{N}$$

4. Para cualquier evento A: $P(A^C) = 1 - P(A)$